УДК 51 (071)

Л.П. Мироненко
Донецкий национальный технический университет, Украина
Украина, 83001, г. Донецк, ул. Артема, 58, *mironenko.leon@yandex.ru*

Эквивалентность стандартных пределов в теории пределов

L.P. Mironenko
Donetsk National Technical University (DonNTU), Ukraine
Ukraine, 83001, c. Donetsk, Artema st., 58

Equivalence of Standard Limits in the Theory of Limits

Л.П. Мироненко
Донецький національний технічний університет, Україна
Україна, 83001, м. Донецьк, вул. Артема, 58

Еквівалентність стандартних границь в теорії границь

Целью статьи является установление эквивалентности первого и второго стандартных пределов в теории пределов, т.е. показано, что пределы $\lim\limits_{x\to 0} \sin x / x = 1$ и $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + 1/x)^x = e$ не являются независимыми друг от друга, а второй, записанный в другом представлении, следует из первого. В работе рассмотрены три способа доказательства – один геометрический и два аналитических на основе формулы Эйлера.
Ключевые слова: предел, стандартные пределы, первый замечательный предел,
второй замечательный предел, формула Эйлера.

In the paper, the equivalence of standard limits $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ and $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + 1/x)^x = e$ in the theory of limits is shown. The second limit follows from the first standard formula. In the work, three form soft the proof of the theorem are presented. They are a geometrical approach and analytical methods based on Euler's formula.
Key Words: limit, standard limit, the first standard limit, the second standard limit, Euler's formula.

У статті встановлено еквівалентність першого і другого стандартних границь. Показано, що границі $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ і $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + 1/x)^x = e$ не являються незалежними один від іншого, а навпаки, другий є наслідком першого. У роботі розглянуто три три способи доказу теореми – геометричний і аналітичні на основі формули Ейлера.
Ключові слова: границя, стандартні границі перша стандартна границя,
друга стандартна границя, формула Ейлера.

Введение

Стандартные пределы $A = \lim\limits_{x\to 0} \sin x / x$ и $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + 1/x)^x = e$ в математическом анализе, также известны под названиями первого и второго замечательных пределов. Названия оправданы тем, что эти пределы используются для вывода производных функций $\sin x, \cos x, e^x, a^x$ и, тем самым, образуют фундамент стандартной таблицы производных [1-4].

В курсе математического анализа каждый из пределов рассматривается независимо друг от друга, а специфический вывод формул пределов (первый стандартный предел следует из предельного перехода в геометрических построениях, а второй использует бином Ньютона) не носит универсального характера [1], [2].

Существует несколько форм записи второго стандартного предела [5], [6]. В дальнейшем будем пользоваться пределом $B=\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)/x$, который следует из $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+1/x\right)^x=e$ в результате преобразования

$$\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+1/x\right)^x=\ln e\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+1/x\right)^x=1\Rightarrow\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+1/x\right)=1,$$

и подстановки

$$1+1/x=e^t,\quad x\to\infty\Rightarrow t\to 0.$$

Обратный переход от формы B к $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+1/x\right)^x=e$ осуществляется (обратной) заменой $x=\ln\left(1+1/t\right)$.

Сформулируем основное содержание работы в виде **теоремы**: *существование одного из пределов A или B следует существование другого предела и $A=B$.*

1 Геометрический подход к выводу стандартных пределов

Обычно первый стандартный предел выводится из геометрических построений и предельного перехода в этих построениях. Вначале рассмотрим окружность единичного радиуса и выполним построения, как показано на рис. 1а).

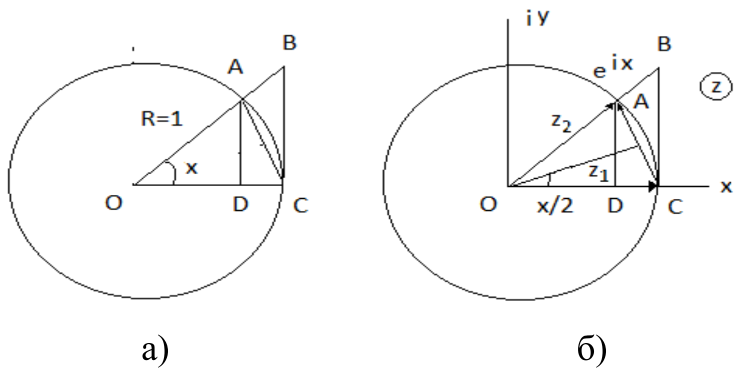


Рисунок 1 – К выводу первого и второго стандартных пределов

Обозначим $\angle AOD=x$ и запишем очевидные неравенства

$$AD\le AC\le \text{дуга } AC\le BC. \quad (1)$$

Поскольку $AD=\sin x=2\sin\left(x/2\right)\cos\left(x/2\right)\le 2\sin\left(x/2\right)=AC$, дуга $AC=x$, $BC=\mathrm{tg}x$, то неравенство (1) имеет вид

$$\sin x\le 2\sin\left(x/2\right)\le x\le \mathrm{tg}x. \quad (2)$$

Представим $\mathrm{tg}x=\sin x/\cos x$, разделим на $\sin x>0$, $0<x<\pi/2$, получим

$$\cos x\le\frac{\sin x}{2\sin\left(x/2\right)}\le\frac{\sin x}{x}\le 1.$$

Перейдем к пределу $x \to +0$ и учтем, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ и

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sin(x/2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{2\sin(x/2)} = \lim_{x\to 0} \cos(x/2) = 1$$

используем свойство пределов для двойного неравенства приходим к тому, что предел $A = \lim\limits_{x\to 0} \sin x / x$ существует и равен единице $A = 1$.

Теперь обратимся к рис. 1б) на комплексной плоскости z. Как видно из рисунка, точка A изображает комплексное число $z_2 = e^{ix}$ (i – мнимая единица) или радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$, а точка C – число $z_1 = 1$ или радиус-вектор $\overrightarrow{OC}$. Разность чисел $z_2 - z_1 = e^{ix} - 1$ дает вектор $\overrightarrow{CA}$. Модуль вектора $\left|\overrightarrow{CA}\right| = \left|e^{ix} - 1\right|$, как видно из треугольника OAC, равен $2\sin(x/2)$. Разделим равенство $\left|e^{ix} - 1\right| = 2\sin(x/2)$ на $x > 0$ и перейдем к пределу $x \to +0$, используя уже ранее подученный предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to +0} \frac{\left|e^{ix} - 1\right|}{x} = \lim_{x\to +0} \frac{2\sin(x/2)}{x} = \lim_{x\to +0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} = 1.$$

Замечание. Последнее равенство $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\sin(x/2)}{x/2} = 1$ справедливо как при $x \to +0$, так и при $x \to -0$, но $\left|e^{ix} - 1\right| \ge 0$. Откуда следует, что $\lim\limits_{x\to +0} \left|e^{ix} - 1\right| / x = 1$ или, учитывая, что $|x| = |ix|$, $|i| = 1$ и $\left|e^{ix} - 1\right| / x = \left|(e^{ix} - 1)/ix\right|$, получим

$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{e^{ix} - 1}{ix}\right| = 1. \tag{3}$$

Докажем, что

$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{e^{ix} - 1}{ix}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x} - 1}{x}. \tag{4}$$

Для этого выполним формально замену $ix = y$ и учтем, что при $x \to 0$ также $ix \to 0$, получим $|B| = \lim\limits_{x\to 0} \left|\dfrac{e^{ix} - 1}{ix}\right| = \lim\limits_{y\to 0} \left|\dfrac{e^{y} - 1}{y}\right|$.

Покажем, что модуль можно снять. Если $y > 0$, то $e^y > 1$ и $|B| = B$; если $y < 0$, то $e^y < 1$, опять $|B| = B$. Отсюда следует равенство (4) и второй стандартный предел $B = 1$.

Замечание. В геометрических рассуждениях радиус окружности может быть $R \ne 1$. В этом случае неравенство (2) примет вид

$$R\sin x \le 2R\sin(x/2) \le Rx \le Rtgx,$$

а $|z_2 - z_1| = \left|e^{ix} - 1\right| = 2\sin(x/2)$ примет вид $|z_2 - z_1| = \left|R(e^{ix} - 1)\right| = 2R\sin(x/2)$. Конечный результат не зависит от R.

2 Аналитический способ доказательства эквивалентности стандартных пределов

Первый способ. Этот способ основан на формуле Эйлера $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ и значительно проще геометрического метода. Перепишем формулу в удобном виде $e^{ix} - 1 = \cos x - 1 + i\sin x$. Разделим равенство на ix и перейдем к пределу $x \to 0$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ix}-1}{ix} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{ix} + \lim\limits_{x\to 0}\frac{i\sin x}{ix}$. Преобразуем первый член правой части и используем формулу $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{ix} = -i\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x} = -i\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\cdot\lim_{x\to 0}\sin(x/2) = 0 .$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2} = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0}\sin(x/2) = 0$. Далее $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ix}-1}{ix} = 1 .$$

В силу равенства (4) получим второй стандартный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1$.

Второй способ. Этот способ также основан на формуле Эйлера $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, но с некоторыми изменениями. Запишем формулу Эйлера для аргумента $-ix$ $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ и выразим функцию $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$. Это равенство справедливо для всех x. Заменим x на ix, получим $\sin ix = (e^{-x} - e^{x})/2i$. Разделим равенство на $ix \neq 0$ и перейдем к пределу $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ix}{ix} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-e^{x}}{2i^2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x} .$$

Во втором слагаемом заменим $-x$ на y и убедимся в том, что $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x}-1)/x = \lim\limits_{x\to 0}(e^{-x}-1)/(-x)$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ix}{ix} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} . \qquad (5)$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ix}{ix} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, то $B = 1$.

Выводы

1. Доказана эквивалентность первого и второго стандартных пределов тремя способами – геометрическим и аналитическими.
2. Стандартные пределы получены в рамках единого (геометрического) подхода.
3. Результаты работы выходят за рамки поставленной задачи, поскольку позволяют получить ряд полезных равенств (2), (3), которые следуют из геометрических построений.

4. Результаты работы имеют некоторый «математически-философский» смысл. В математическом анализе стандартные пределы рассматриваются независимо друга, а в статье устанавливается связь между стандартными пределами и показана их геометрическая эквивалентность.

5. В литературе второй стандартный предел записывают в виде $C = \lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$, а предел $B = \lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$ является следствием. Для создания таблицы производных используется именно форма B, что нами получено как основной результат, а форма C выводится из B.

Литература

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ / Кудрявцев Л.Д. – М. : Наука,1970. – Том I. — 571 с.
2. Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – М. : Изд. ФМЛ, 1956. – Т. 1. – 472 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г.М. – М. : Изд. ФМЛ, 1972. – Том 1. – 795 с.
4. Гурса Э. Курс математического анализа / Гурса Э. – Москва : Государственное технико-творческое издательство, 1933. – Том 1. – 368 с
5. Шведов И.А. Компактный курс анализа / Шведов И.А. – Новосибирск, 2003. – Т. 1. – 113с.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики / Смирнов В.И. – Москва : Наука, 1974. – Т. 1. – 479 с.

Literatura

1. Kudrjavcev L.D. Matematicheskij analiz. Tom I. Nauka.1970. 571 s.
2. Il'in V.A. Osnovy matematicheskogo analiza. Tom 1. Izd. FML. Moskva. 1956. 472s.
3. Fihtengol'c G.M. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija. Tom 1. Nauka. «FML». 1972. 795 s.
4. Gursa Je. Kurs matematicheskogo analiza. Tom 1. Gosudarstvennoe tehniko-tvorcheskoe izdatel'stvo. Moskva. 1933. 368 s.
5. Shvedov I.A. Kompaktnyj kurs analiza. T. 1. Novosibirsk. 2003. 113s.
6. Smirnov V.I. Kurs vysshej matematiki. T. 1. Nauka. Moskva. 1974. 479s.

L.P. Mironenko

Equivalence of Standard Limits in the Theory of Limits

In the paper, the equivalence of standard limits $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (1) and $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$ (2) (or $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$) in the theory of limits is shown. The second limit follows from the first standard formula. In the work three forms of the proof are presented. They are a geometrical approach and two analytical methods based on Euler's formula.

Geometrical approach.

Let $\angle AOD = x$ and we will right down the obvious inequalities (Fig. 1,a)

$$AD \le AC \le \text{дуга } AC \le BC. \Leftrightarrow \sin x \le 2\sin(x/2) \le x \le tgx.$$

Substituting $tgx = \sin x / \cos x$ and taking into account that $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ and after division the inequalities on $\sin x > 0$, $0 < x < \pi/2$ we will get the next inequalities $\cos x \le \frac{\sin x}{2\sin(x/2)} \le \frac{\sin x}{x} \le 1.$ Using a property of limits for double inequalities [1] and taking them at $x \to +0$ we will obtain the first standard limit (1).

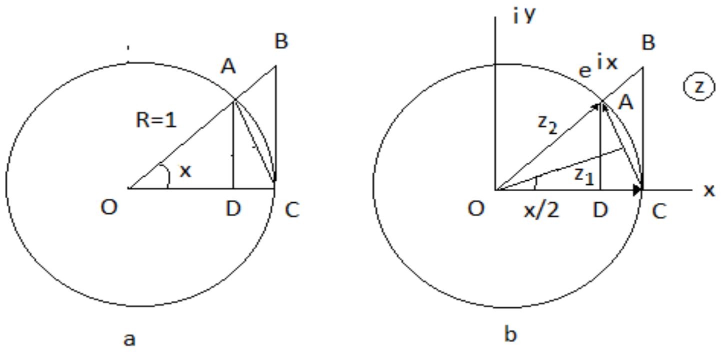


Fig. 1. Geometric consideration of proving of the first and second standard limits.

Now we will look at the second figure (Fig. 1,b) on a complex plane z. The point A describes the complex number $z_2 = e^{ix}$ (i is image unit) or radios vector $\overrightarrow{OA}$, the point C is the real number $z_1 = 1$ or radios vector $\overrightarrow{OC}$. A difference of the numbers is $z_2 - z_1 = e^{ix} - 1$. It is the vector $\overrightarrow{CA}$. As you can see from the triangle OAC, the modulus of the vector $|\overrightarrow{CA}| = |e^{ix} - 1|$ is $2\sin(x/2)$. Dividing the equality $|e^{ix} - 1| = 2\sin(x/2)$ at $x > 0$ we will get the limit

$$\lim_{x\to+0} \frac{|e^{ix} - 1|}{x} = \lim_{x\to 0} \left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} \right| = \lim_{x\to+0} \frac{2\sin(x/2)}{x} = \lim_{x\to+0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} = 1.$$

Here we have used the limit (1). Replacing the variable $ix = y$ we will get the equality

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} \qquad (3),$$

which is equal to 1.

Analytical approach.

Consideration is based on Euler's formula $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, which we will right down as $e^{ix} - 1 = \cos x - 1 + i\sin x$. Dividing the equality on ix and applying the limit at $x \to 0$, we will get $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ix} - 1}{ix} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{ix} + \lim\limits_{x\to 0} \frac{i\sin x}{ix}$. Taking into account that $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ we will get $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{ix} = -i \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x} = -i \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \sin(x/2) = 0$. As a result, we will obtain

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ix} - 1}{ix} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^{ix} - 1}{ix} = 1.$$

According to the equality (3), we will get the second standard limit (2).

Статья поступила в редакцию 06.04.2012.